Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 27** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 22/06, 16h30

Aula 27
①/4

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 100 a 104 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 13 e 14 — Propriedades da Transformada de Laplace (continuação)

Propriedade 5: Derivada da transformada

Seja $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0;b]$, $b>0$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)}, \text{ para } s > s_f$$

onde $F^{(n)}$ denota a derivada de ordem n de F.

Exercício 1: Calcular a T.L. das funções:

a) $f(t) = t e^{2t}$

b) $f(t) = t^2 \cos t$

Exercício 2: Calcular $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \cos(t)\, dt$

Propriedade 6: Transformada da derivada

Suponha-se que $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ ($n \in \mathbb{N}$) são funções de ordem exponencial s_0, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$. Se $f^{(n)}$ existe e é seccionalmente contínua em $[0,+\infty[$, então existe $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$, para $s > s_0$, e

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

Por exemplo:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\}(s) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$$

Exercício 3: Calcular $\mathcal{L}\{f''(t)\}(s)$ sendo $f(t) = \cosh(-3t)$

Exercício 4: Considere-se o PVI $\begin{cases} y'' + y' = \cos(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

a) Calcular $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

b) Como determinar $y(t)$?

Slides 16 e 17 **Transformada de Laplace Inversa (T.L. Inversa)**

Definição: Seja $F(s)$ uma função definida para $s > \alpha$.
A **transformada de Laplace Inversa de F**, denotada por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, é uma função f, caso exista, de domínio $\mathbb{R}_0^+$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, $s > \alpha$, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t), \ t \geq 0$$

Notações: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ou $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$ ou $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$

Esquema:

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, bend left, "\text{T.L. } \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s),\ s > s_f"] & F(s) \arrow[l, bend left, "\text{T.L. Inversa } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t),\ t \geq 0"] \end{tikzcd}$$

sempre

Exemplo: Seja $F(s) = \dfrac{1}{s-2}$, $s > 2$. Qual será $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$?

Como $\mathcal{L}\{e^{2t}\}(s) = \dfrac{1}{s-2}$, $s > 2$, então $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$, $t \geq 0$

Notas:
- A T.L. Inversa nem sempre existe
- A T.L. Inversa pode não ser única (escolhemos sempre a que for contínua, que é única de acordo com o teorema seguinte)

Teorema: Sejam f e g duas funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ tais que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \text{ para } s > \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Se f e g são contínuas no ponto $t \in \mathbb{R}^+$, então $f(t) = g(t)$

Slides 18 e 19 | Propriedades da T. L. Inversa

Linearidade da T. L. Inversa

Suponha-se que F e G admitem T. L. Inversa. Então as funções $F+G$ e αF $(\alpha \in \mathbb{R})$ também admitem T. L. Inversa e

(i) $\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}$

Exercício 5: Determine a T. L. Inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{3}{s+4}$ b) $F(s) = \dfrac{4}{s^7}$ c) $F(s) = \dfrac{2s+5}{s^2-9}$

No que se segue recordo as propriedades 1 e 2 da T. L. dadas na última aula e têm as respetivas versões para a T. L. Inversa (que não estão no formulário)

Transformada de Laplace	Transformada de Laplace Inversa
Propriedade 1	
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
Propriedade 2	
$\mathcal{L}\{H_a(t) f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s)\,,\ s > s_f,\ a \in \mathbb{R}^+$	$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\}(t) = H_a(t) \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t-a)$

Nota: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

Exercício 6: Determine a T. L. inversa das seguintes funções:

a) $F(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2}$

b) $F(s) = \dfrac{2s+7}{(s+3)^2+1}$

c) $F(s) = \dfrac{5}{s^2-6s-7}$

d) $F(s) = \dfrac{s e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+9}$

e) $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$

Exercício 7: Responder à alínea b) do exercício 4

Recordar Cálculo 1: Decomposição em frações simples

Exemplos: Seja $N(s)$ um polinómio de grau ≤ 2.

- $$\frac{N(s)}{(s-2)(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+3} \; ; \; A, B, C \in \mathbb{R}$$

- $$\frac{N(s)}{(s-2)(s+3)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2} \; , \; A, B, C \in \mathbb{R}$$

- $$\frac{N(s)}{(s-2)(s^2+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+3} \; , \; A, B, C \in \mathbb{R}$$

TPCs: Folha prática 5 : 1e) g) ; 2 ; 3 ; 5

2.º teste, 19/06/2019 → Ex. 4

2.º teste, 13/06/2018 → Ex. 6

Aula 27

1) a) $f(t) = te^{2t}$

Propriedade 5

$$\mathcal{L}\{t\,\underbrace{e^{2t}}_{g(t)}\}(s) = (-1)^1 \times G'(s)$$

$m=1$

c. aux. $G(s) = \mathcal{L}\{e^{2t}\}(s) = \frac{1}{s-2}$, $s>2 \rightsquigarrow G'(s) = \left(\frac{1}{s-2}\right)' = \frac{-1}{(s-2)^2}$

Resolução alternativa $\rightsquigarrow$ Usar a propriedade 1 (mais simples)

Prop. 1

$$\mathcal{L}\{\underbrace{t}_{g(t)}\,e^{\overbrace{2}^{\lambda=2}t}\}(s) = G(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2},\ s > \overbrace{0+2}^{2}$$

c. aux. $G(s) = \mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$, $s>0$

b) $f(t) = t^2\cos(t)$

Prop. 5

$$\mathcal{L}\{t^2\underbrace{\cos(t)}_{g(t)}\}(s) = \underbrace{(-1)^2}_{=1} \times G''(s)$$

$m=2$

c. aux. $G(s) = \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$, $s>0$ $\quad G'(s) = \frac{1\times(s^2+1) - s\times 2s}{(s^2+1)^2} = \frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2}$

$$G''(s) = \frac{-2s\times(s^2+1)^2 - (-s^2+1)\times 2(s^2+1)\times 2s}{(s^2+4)^4} = \frac{\cancel{(s^2+1)}\times\left(-2s\times(s^2+1) - (-s^2+1)\times 2\times 2s\right)}{(s^3+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-2s^3-2s+4s^3-4s}{(s^2+1)^3} = \frac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}$$

2) $$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\cos(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\underbrace{t^2\cos(t)}_{f(t)}$$

$s=1$

Ex. 1 b)

usar a definição de T. L. (Aula 26, pág. 1)

$$= \mathcal{L}\{t^2\cos(t)\} = \frac{2\times1^3-6\times1}{(1^2+1)^3} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

3) $f(t) = \cosh(-3t)$

Prop. 6

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - f(0) - f'(0) = s^2\times\frac{s}{s^2-9} - s\times1 - 0 = \frac{s^3}{s^2-9} - \frac{s}{1}_{\times(s^2-9)}$$

$$= \frac{s^3-s^3+9s}{s^2-9} = \frac{9s}{s^2-9},\ s>3$$

C. aux.

- $F(s)\ \{\cosh(-3t)\}(s) = \frac{s}{s^2-(-3)^2}$, $s>|-3|$
  $= \frac{s}{s^2-9}$, $s>3$
- $f(0) = \cosh(0) = 1$
- $f'(t) = (\cosh(-3t))' = -3\operatorname{senh}(-3t)$
  $\longrightarrow f'(0) = -3\operatorname{senh}(0) = 0$

Nota: $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$(\cosh u)' = u'\operatorname{senh} u$

$(\sinh u)' = u'\cosh u$

4) $\begin{cases} \boxed{y'' + y' = \cos(t)} \to \text{EDO} \\ \left.\begin{array}{l} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right\} \text{condições iniciais} \end{cases}$

a) $y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = ?$

1º Passo: Aplicar a T.L. a ambos os membros da EDO

$$\mathcal{L}\{y'' + y'\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) \underset{\text{Prop. 6.}}{\Leftrightarrow} \underbrace{s^2 y(s) - s y(0) - y'(0)}_{\mathcal{L}\{y''\}(s)} + \underbrace{s y(s) - y(0)}_{\mathcal{L}\{y'\}(s)} = \frac{s}{s^2+1},\ s>0$$

2º Passo: Substituir as condições iniciais e resolver a equação em ordem a $y(s)$

$$\Leftrightarrow s^2 y(s) - s\times 2 - 0 + s y(s) - 2 = \frac{s}{s^2+1} \Leftrightarrow \underbrace{(s^2+s)}_{s(s+1)} y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \underbrace{2s+2}_{2(s+1)}$$

$$\Leftrightarrow y(s) = \frac{\cancel{s}}{(s^2+1)\cancel{s}(s+1)} + \frac{2\cancel{(s+1)}}{s\cancel{(s+1)}} \Leftrightarrow y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)} + \frac{2}{s},\ s>0$$

b) 3º Passo: Calcular a $\underbrace{\text{T.L. Inversa}}_{\text{Próxima matéria}}$: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} \to$ resolução no ex. 7

5)

a) $F(s) = \frac{3}{s+4}$ $\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+4}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = 3e^{-4t},\ t\geq 0$

b) $F(s) = \frac{4}{s^7}$ $\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^7}\right\} = \frac{4}{6!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\times 6!}{s^7}\right\} = \frac{4}{6!}t^6,\ t\geq 0$

c) $F(s) = \frac{2s+5}{s^2-9}$ $\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{s^2-9}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\times 3}{s^2-9}\right\} = 2\cosh(3t) + \frac{5}{3}\operatorname{senh}(3t),\ t\geq 0$

6) a) $F(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$ $\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} \overset{\text{Prop. 1}}{=} e^{2t}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \overset{\text{formulário}}{=} e^{2t}\times t,\ t\geq 0$

$\to G(s-2)$ $\quad \lambda = 2$ $\quad \to G(s)$

b) $F(s) = \frac{2s+7}{(s+3)+1}$

$\downarrow$ C. aux.

$$\frac{2(s+3-3)+7}{(s+3)^2+1} = \frac{2(s+3)-6+7}{(s+3)^2+1} = \frac{2(s+3)+1}{(s+3)^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+3)+1}{(s+3)^2+1}\right\} \overset{\text{Prop. 1}}{=} e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+1}\right\} = e^{-3t}\left(2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right)$$

$\to G(s+3)$ $\quad \lambda = -3$

$$= e^{-3t}(2\cos t + \operatorname{sen} t),\ t\geq 0$$

c) $F(s) = \frac{5}{s^2-6s-7}$ $\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2-(s-7)}\right\} = ?$

1ª Resolução: C. aux. $s^2 - 6s - 7 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow s = -1 \vee s = 7$ Logo $s^2 - 6s - 7 = (s+1)(s-7)$

$$\frac{5}{(s+1)(s-7)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-7},\ A, B\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 5 = A(s-7) + B(s+1) \Leftrightarrow 5 = As - 7A + Bs + B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -7A + B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 7B + B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{5}{8} \\ B = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Então: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2-6s-7}\right\} = -\frac{5}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{5}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-7}\right\} = \frac{-5}{8}e^{-t} + \frac{5}{8}e^{7t},\ t\geq 0$

2ª Resolução: C. aux $s^2-6s-7 = s^2-6s+9-9 = (s-3)^2-16$

$\hookrightarrow \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ $\quad \underbrace{s^2-6s+9}_{(s-3)^2}$

Então: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2-6s-7}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s-3)^2-16}\right\}$ Prop. 1 $\lambda=3$ $\quad$ igual $\quad \frac{-5}{8}e^{-t}+\frac{5}{8}e^{7t}$ Ver nota

$$= e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2-16}\right\} = e^{3t}\times\frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\times 4}{s^2-16}\right\} = e^{3t}\times\frac{5}{4}\operatorname{senh}(4t),\ t\geq 0$$

Nota: $= e^{3t}\times\frac{5}{4}\left(\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{2}\right) = \frac{5}{8}e^{7t}-\frac{5}{8}e^{-t},\ t\geq 0$

$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

d) $F(s) = \frac{s\,e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+9}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}\times\frac{s}{s^2+9}\right\} = H_{\frac{\pi}{2}}(t)\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = H_{\frac{\pi}{2}}(t)\times\cos\left(3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right),\ t\geq\frac{\pi}{2}$$

Prop 2

$a=\frac{\pi}{2}$ $\qquad G(s)$

Com $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos(3t),\ t\geq 0$

e) $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{-s}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = 1-\cos t,\ t\geq 0$$

C. aux. $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$, $A,B,C\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 1 = A(s^2+1)+(Bs+C)s$

$$\Leftrightarrow 1 = As^2+A+Bs^2+Cs \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

7) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s+1)}+\frac{2}{s}\right\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s+1)}\right\}}_{\text{C. aux.}} + 2\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_{=1} = \frac{1}{2}(-\cos t+\operatorname{sen} t+e^{-t})+2,\ t\geq 0$

C. aux. $\frac{1}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{As+B}{s^2+1}+\frac{C}{s+1} \rightsquigarrow$ Acabar T.P.C.